# Priemerované zmiešané logaritmické rozdelenia typu 1a

Samuel Hudec

Univerzita Mateja Bela
Fakulta prírodných vied

# Miešanie (Všeobecná definícia)

Nech $\alpha_n$; $n = 0, 1, 2, ...$ sú nezáporné čísla a $X_n$ sú nezáporné celočíselné náhodné premenné s pravdepodobnostnými funkciami $\{P_n(x)\}_{x=0}^{\infty}$ a $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1$. Potom

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n P_n(x)\}_{x=0}^{\infty} \tag{1}$$

je pravdepodobnostná funkcia náhodnej premennej $X$, ktorá je zmesou náhodných premenných $X_0, X_1, ...$ s váhami $\alpha_0, \alpha_1, ...$

# Miešanie

Nech diskrétna náhodná premenná $X$ závisí na parametri $\theta$, ktorý je realizáciou inej diskrétnej náhodnej premennej $\Theta$.
Náhodná premenná má pmf

$$P\{(X \bigwedge_{\theta} \Theta) = i\} = \sum_{\theta=0}^{\infty} P_{X|\Theta=\theta}(i) P_{\Theta}(\theta), \quad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

# Miešanie

Nech $X_1, X_2, ...$ sú iid a $N$ je ďalšia nezávislá diskrétna náhodná premenná.

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N, \tag{3}$$

kde $S$ má rozdelenie, ktoré sa nazýva zovšeobecnené alebo zmiešané rozdelenie. (Modely kolektívneho rizika)

# Miešanie (priemerované zmiešané rozdelenia)

Nech $X_1, X_2$ sú nezávislé diskrétne náhodné premenné nadobúdajúce hodnoty $x_1, x_2, \ldots$ zo známymi (štandardnými) rozdeleniami pravdepodobnosti a pmf tvaru $\{\frac{f_j(x_i)}{\alpha^{(j)}}\}_{i=1}^{\infty}$, $j = 1, 2$. Potom

$$P(x_i) = C\left(f_1(x_i) - f_2(x_i)\right), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

$f_i(x)$, $i = 1, 2$ sú ,,nenormalizované časti" známych rozdelení pravdepodobnosti a $C$ je normalizačná konštanta.

# Všeobecná forma

$$P(x) = \frac{a^x - rb^x}{x[r \ln(1-b) - \ln(1-a)]}, \quad \text{pre} \quad x = 1, 2, 3 \ldots, \qquad (5)$$

kde parametrický priesor dostaneme z

$$a^x - rb^x \geq 0, \quad \text{pre} \quad x = 1, 2, 3...$$

alebo

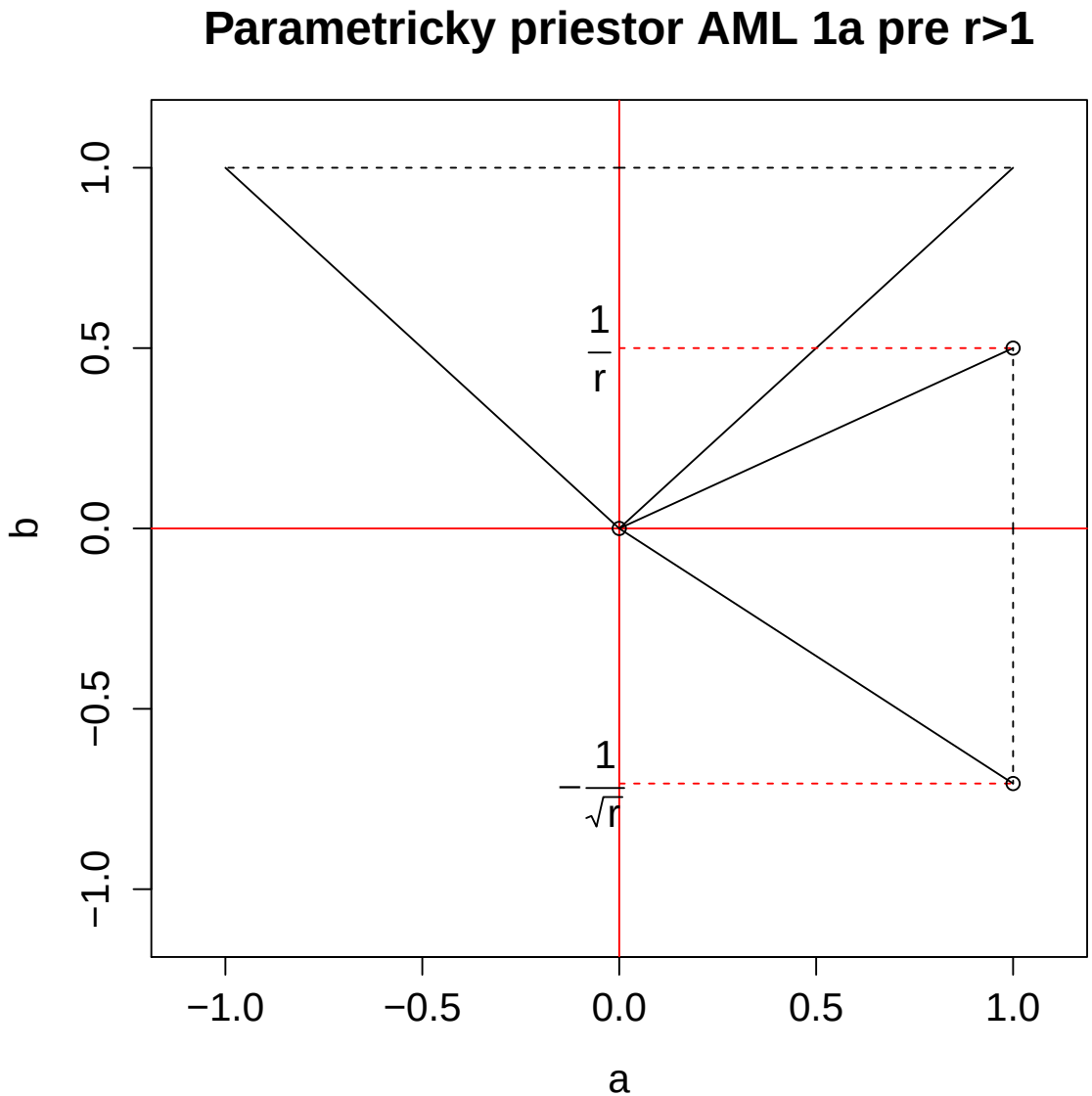
$$a^x - rb^x \leq 0. \quad \text{pre} \quad x = 1, 2, 3...$$

# Všeobecná forma (Parametrický priestor)

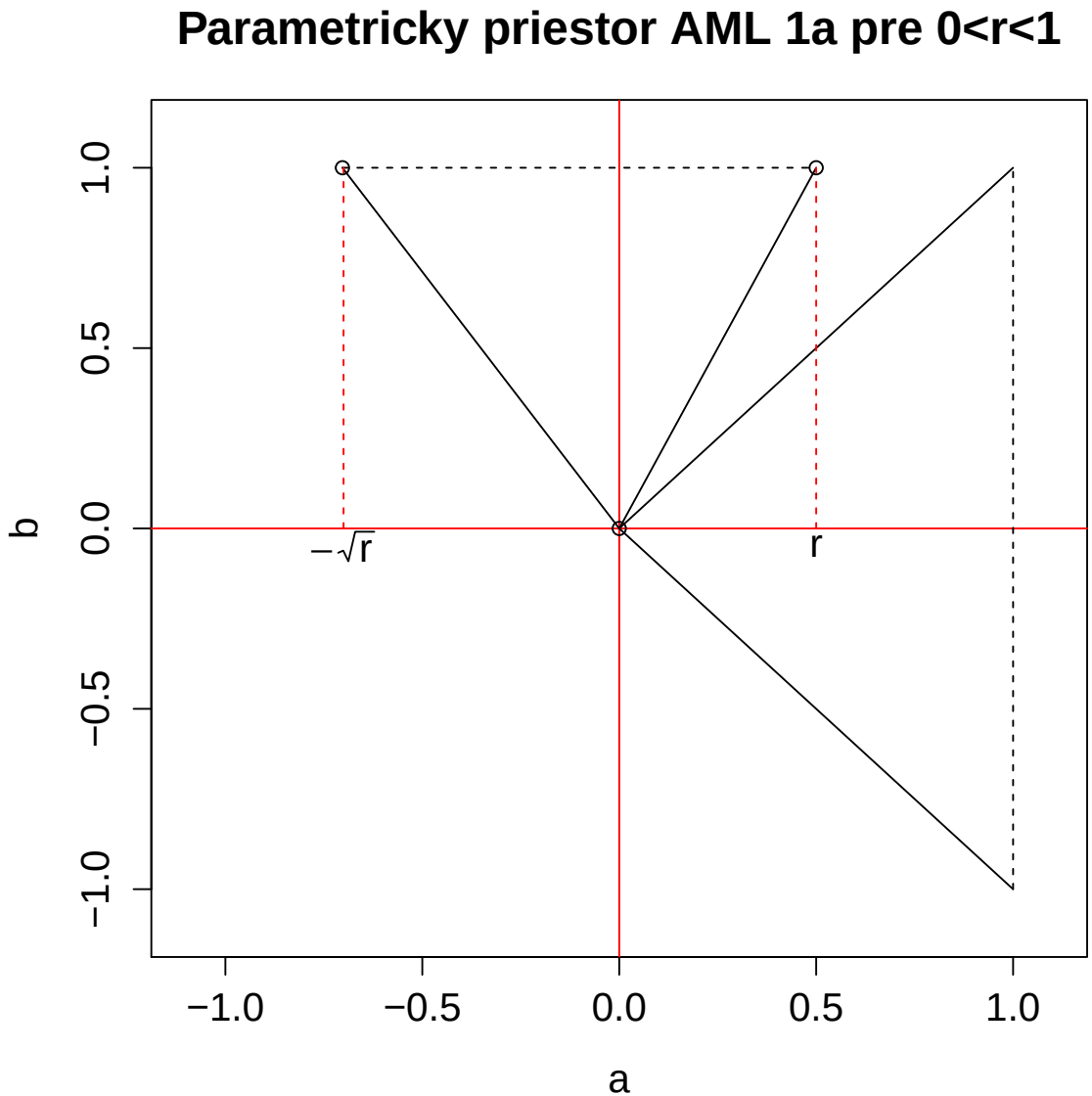
Parametrický priestor si rozdelíme na šesť časti vzhladom na parameter $r$

1. $r = 1$,
2. $r > 1$,
3. $0 < r < 1$,
4. $-1 < r < 0$,
5. $r = -1$,
6. $r < -1$.

# Všeobecná forma (Parametrický priestor)



# Všeobecná forma (Parametrický priestor)



# Odhady parametrov (Metóda maximalnej vierohodnosti)

$$\ln \mathcal{L}(x_1, x_2, ..., x_n; a, b, r) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a^{x_i} - r b^{x_i}}{x_i [r \ln(1-b) - \ln(1-a)]}, \quad (6)$$

kde $n$ je rozsah náhodneho výberu. Realizácie odhadov získaných ML metódou riešime ako maximalizačnú úlohu funkciou `constrOptim.nl` z knižnice `alabama`.

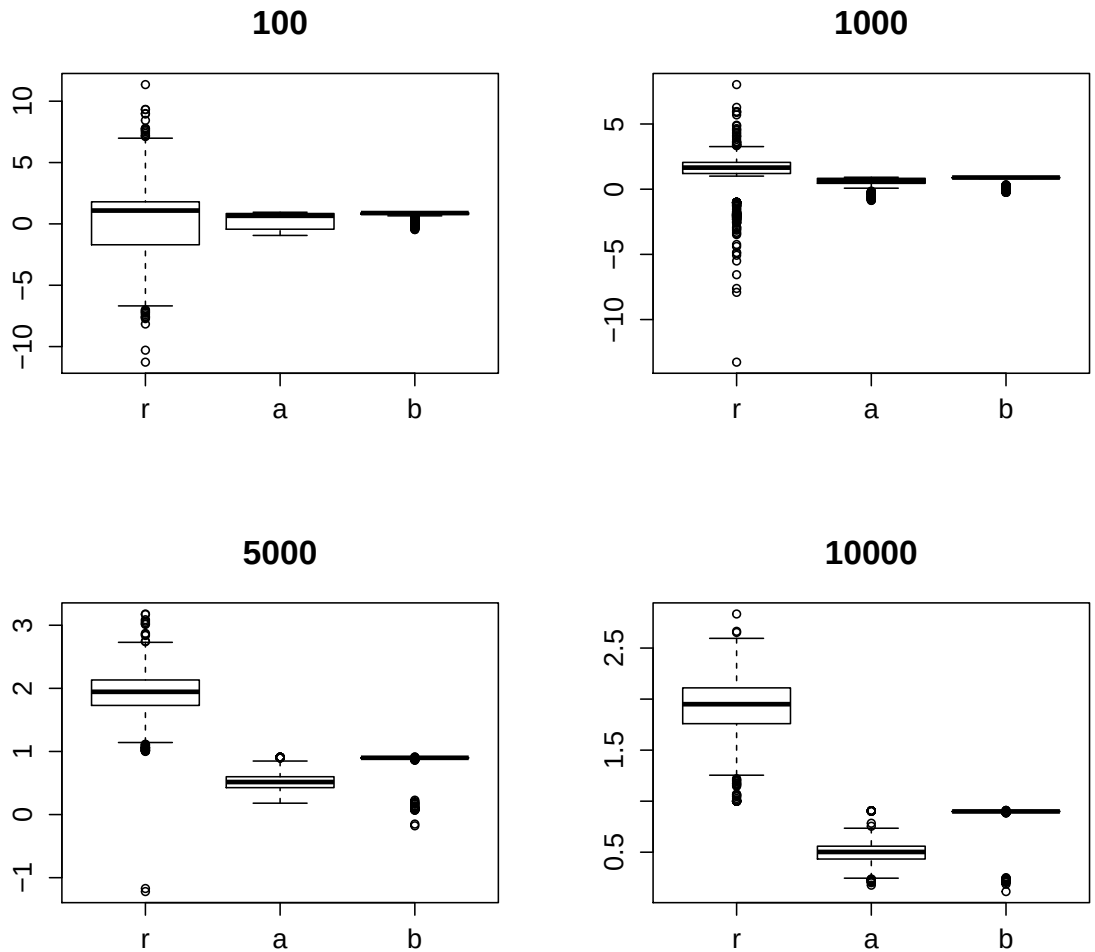
# Odhady parametrov (Asymptotické vlastnosti ML)

asymptotické vlastnosti ML odhadu

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx N_3\left(\boldsymbol{\theta}; \frac{1}{N}\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})\right),$$

kde $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ je Fisherova informačná matica.

# Odhady parametrov (Asymptotické vlastnosti ML)




Obr.: Boxploty odhadov parametrov $r = 2, a = 0.5, b = 0.9$ pri rozsahu $N = 100, 1000, 5000, 10000$ náhodných výberov.

# Príklad rozdelenia

Pre toto rozdelenie nájdeme v literature *Janardan-logarithmic* rozdelenie a je definované ako

$$P(x) = \frac{(\beta\theta)^x + \alpha\theta^x}{x[-\ln(1-\beta\theta) - \alpha\ln(1-\theta)]}, \quad \text{pre} \quad x = 1, 2, 3\ldots,$$

kde $r = \alpha$, $a = \beta\theta$ a $b = \theta$.

Ďakujem za pozornosť.